Développement
Théorème de l'application ouverte

Nathan Fournié

Walter Rudin, *Analyse complexe et réelle.*
Daniel Li, *Cours d'analyse fonctionnelle.*

Théorème: Théorème de l'application ouverte

Soit E et F deux espaces de Banach, et T une application linéaire continues surjective de E vers F, alors il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

T est donc une application *ouverte*.

Démonstration

Montrons dans un premier temps qu'on a l'inclusion suivante :

$$B_F(0,2c) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$$

pour un certain $c > 0$. Par surjectivité de T, pour tout $y \in F$, il existe un n tel que y admette un antécédent dans la boule $B_E(0,n)$, on peut alors écrire :

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{T(B_E(0,n))}.$$

Cette réunion de fermés est d'intérieur non vide, donc par la contraposé du théorème de Baire, on peut trouver un n_0 tel que l'ensemble $\overline{T(B_E(0,n_0))}$ soit d'intérieur non vide. Il existe alors $y_0 \in F$ et $r_0 > 0$ tels que :

$$B_F(y_0,r_0) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}.$$

Puis, par linéarité de T et symétrie par rapport à 0 de $B_E(0,r_0)$ on voit que :

$$B_F(-y_0,r_0) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}.$$

Enfin, $T(B_E(0,n_0))$ est l'image d'un convexe par une application linéaire et continue, donc c'est elle-même un convexe. Ce faisant, toute combinaison convexe[a] de ses sous-ensembles appartient encore à $T(B_E(0,n_0))$. Donc :

$$\frac{1}{2}(B_F(y_0,r_0) + B_F(-y_0,r_0)) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}$$

Or, $B_F(y_0,r_0) + B_F(-y_0,r_0) = B_E(0,2r_0)$ donc[b] :

$$B_F(0,2r_0) \subset 2\overline{T(B_F(0,n_0))} = 2\overline{n_0 T(B_E(0,1))} = 2n_0\overline{T(B_E(0,1))},$$

donc, en posant $c = \dfrac{r_0}{2n_0}$ on obtient bien :

$$B_F(0,2c) \subset \overline{T(B_E(0,1))} \tag{†}$$

Montrons à présent que :

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

Prenons alors un $y \in B_F(0,c)$, par (†) on sait que $y \in \overline{T(B_E(0,\frac{1}{2}))}$, c'est à dire que l'on peut approcher y aussi près que l'on veut par l'image par T d'un élément de $B_E(0,\frac{1}{2})$. En d'autre termes, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x \in B_E(0,\frac{1}{2})$ tel que :

$$\|y - T(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{c}{2}$, notons x_1 l'élément de $B_E(0,\frac{1}{2})$ tel que :

$$\|y - T(x_1)\| \leqslant \frac{c}{2}.$$

Donc, $y_1 := y - T(x_1) \in B_F(0,\frac{c}{2})$, par (†) on a $y_1 \in \overline{T(B_E(0,\frac{1}{4}))}$ et on peut de la même façon trouver un $x_2 \in B_E(0,\frac{1}{4})$ tel que :

$$\|y_1 - T(x_2)\| = \|y - T(x_1) - T(x_2)\| = \|y - T(x_1 + x_2)\| \leqslant \frac{c}{4}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite (x_n) vérifiant, pour tout n :

$$x_n \in B_E(0,\frac{1}{2^n}) \quad \text{et} \quad \|y - T(x_1 + ... + x_n)\| \leqslant \frac{c}{2^n}$$

On remarque alors que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|x_n\| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Donc [c], la suite $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n)$ converge absolument, comme on est dans un Banach, elle converge [d]. Notons x sa limite, comme on a :

$$\|x\| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|x_n\| \leqslant 1$$

on sait que $x \in B_E(0,1)$. De plus, par construction, on sait que la suite $(T(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n))$ converge vers y dans F. Par continuité de T, on voit alors que :

$$y = T(x).$$

Ceci achève la preuve de la première partie, on a bien $y \in T(B_E(0,1))$.

Il nous reste encore à montrer que T est une application ouverte, pour cela prenons un ouvert U de E et montrons que $T(U)$ et un ouvert de F. Soit $y \in T(U)$, il existe alors $x \in U$ tel que $y = T(x)$. Comme U est ouvert on peut trouver un rayon $r > 0$ tel que :

$$B_E(x,r) \subset U$$

Or, tout élément de $B_E(x, r)$ peut s'écrire de la forme $x + rx'$ avec $x' \in B_E(0, 1)$. Donc :

$$x + rB_E(0, 1) \subset U,$$

qui nous permet d'avoir :

$$T(x + rB_E(0, 1)) = T(x) + rT(B_E(0, 1)) \subset T(U).$$

Et enfin, en utilisant la première partie on trouve un $c > 0$ tel que :

$$y + rB_F(0, c) = B(y, rc) \subset T(U)$$

Ce qui achève définitivement la preuve.

a. On définit $A + B = \{a + b\ ,\ a, b \in A \times B\}$. De plus, une combinaison convexe de sous-ensemble de A est de la forme $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k$ avec $A_k \subset A$ et $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$

b. T est linéaire !

c. Suite positive bornée.

d. Caractérisation des Banach.